

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

по «МЕТОДАМ ВЫЧИСЛЕНИЙ»

для студентов **5 курса заочной формы** обучения на 2016/17 уч.год

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Тема 4 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений.
Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned}(9+k)x_1+2x_2+3x_3&=21+k \\ 2x_1+(8+k)x_2+4x_3&=34+3k \\ 3x_1+4x_2+(12+k)x_3&=39+2k,\end{aligned}$$

$$k = 0.5n + \frac{g-n}{g+n}$$

где n – номер варианта, исходя из списка по журналу, g – номер года

Задание 4.1: Методом Гаусса по схеме единственного деления.

Задание 4.2: Методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице.

Задание 4.3: По схеме Халецкого.

Задание 4.4: Методом квадратного корня.

Задание 4.5: Вычислить определитель матрицы по алгоритмам п.п. 4.1,4.3,4.4.

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Задание 4.6: Для приведенной выше системы алгебраических уравнений найти ее решение методом простой итерации с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Задание 4.7: Для приведенной выше системы алгебраических уравнений найти ее решение методом Зейделя с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Задание 4.8: Для приведенной выше системы алгебраических уравнений определить условия сходимости методов простой итерации и Зейделя.

Задание 4.9: Для решения приведенной выше системы алгебраических уравнений методами простой итерации и Зейделя сделать шесть итераций.

Задание 4.10: Для требуемой точности вычислений $\varepsilon=10^{-3}$ определить необходимое количество итераций “ K ” и вычислить его.

Тема 5 ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦ

Прямые методы решения проблемы собственных значений.

Задание 5.1: Для матрицы A из задания 4.1 определить собственные значения и отвечающие им собственные вектора методом Крылова.

Задание 5.2: Для матрицы A из задания 4.3 определить собственные значения и отвечающие им собственные вектора методом Данилевского.

Итерационные методы решения проблемы собственных значений.

Задание 5.3: Найти собственные значения и отвечающие им собственные вектора методом Якоби.

Задание 5.4: Найти наибольшее первое и второе собственные значения и отвечающие им собственные вектора методом итераций.

Тема 6 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Одношаговые решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Используя приближенные методы составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a, b]$; шаг $h = 0.1$. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками. Правую границу уменьшить для получения решения в 6 точках.

Задание 6.1: Используя метод Эйлера решить сформулированную выше задачу.

Задание 6.2: Используя усовершенствованный метод Эйлера решить сформулированную выше задачу.

Задание 6.3: Используя метод Эйлера-Коши решить сформулированную выше задачу.

Задание 6.4: Используя метод Рунге-Кутты решить сформулированную выше задачу.

Задание 6.5: Методом Адамса продолжить решение по экстраполяционной формуле в точках 4,5,6.

Варианты:

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{5}}$
$y_0(1.8) = 2.6, x \in [1.8; 2.8]$ | 2) $y' = x + \cos \frac{y}{3}$
$y_0(1.6) = 4.6, x \in [1.6; 2.6]$ | 3) $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{10}}$
$y_0(0.6) = 0.8, x \in [0.6; 1.6]$ |
| 4) $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{7}}$
$y_0(0.5) = 0.6, x \in [0.5; 1.5]$ | 5) $y' = x + \cos \frac{y}{\pi}$
$y_0(1.7) = 5.3, x \in [1.7; 2.7]$ | 6) $y' = x + \cos \frac{y}{2.25}$
$y_0(1.4) = 2.2, x \in [1.4; 2.4]$ |
| 7) $y' = x + \cos \frac{y}{e}$
$y_0(1.4) = 2.5, x \in [1.4; 2.4]$ | 8) $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{2}}$
$y_0(0.8) = 1.4, x \in [0.8; 1.8]$ | 9) $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{3}}$
$y_0(1.2) = 2.1, x \in [1.2; 2.2]$ |
| 10) $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{11}}$
$y_0(2.1) = 2.5, x \in [2.1; 3.1]$ | 11) $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{5}}$
$y_0(1.8) = 2.6, x \in [1.8; 2.8]$ | 12) $y' = x + \cos \frac{y}{3}$
$y_0(1.6) = 4.6, x \in [1.6; 2.6]$ |
| 13) $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{10}}$
$y_0(0.6) = 0.8, x \in [0.6; 1.6]$ | 14) $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{7}}$
$y_0(0.5) = 0.6, x \in [0.5; 1.5]$ | 15) $y' = x + \sin \frac{y}{\pi}$
$y_0(1.7) = 5.3, x \in [1.7; 2.7]$ |
| 16) $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{2.8}}$
$y_0(1.4) = 2.2, x \in [1.4; 2.4]$ | 17) $y' = x + \sin \frac{y}{e}$
$y_0(1.4) = 2.5, x \in [1.4; 2.4]$ | 18) $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{2}}$
$y_0(0.8) = 1.3, x \in [0.8; 1.8]$ |

- 19) $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{3}}$
 $y_0(1.1) = 1.5, x \in [1.1; 2.1]$
- 20) $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{11}}$
 $y_0(0.6) = 1.2, x \in [0.6; 1.6]$
- 21) $y' = x + \sin \frac{y}{1.25}$
 $y_0(0.5) = 1.8, x \in [0.5; 1.5]$
- 22) $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{1.3}}$
 $y_0(0.1) = 0.8, x \in [0.1; 1.1]$
- 23) $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{0.3}}$
 $y_0(0.5) = 0.6, x \in [0.5; 1.5]$
- 24) $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{0.7}}$
 $y_0(1.2) = 1.4, x \in [1.2; 2.2]$
- 25) $y' = x + \cos \frac{y}{1.25}$
 $y_0(0.4) = 0.8, x \in [0.4; 1.4]$
- 26) $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{1.5}}$
 $y_0(0.3) = 0.9, x \in [0.3; 1.3]$
- 27) $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{1.3}}$
 $y_0(1.2) = 1.8, x \in [1.2; 2.2]$
- 28) $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{0.3}}$
 $y_0(0.7) = 2.1, x \in [0.7; 1.7]$
- 29) $y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{0.7}}$
 $y_0(0.9) = 1.7, x \in [0.9; 1.9]$
- 30) $y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{2.8}}$
 $y_0(1.4) = 2.2, x \in [1.4; 2.4]$

Тема 7 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Разностные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Задание 7.1: Используя метод конечных разностей, построить решение краевой задачи для ОДУ второго порядка; шаг $h = 0.1$. В краевых условиях производную аппроксимировать на трех точечном шаблоне. Полученную систему уравнений решить методом Гаусса.

Задание 7.2: Методом прогонки найти решение краевой задачи из пункта 1. В краевых условиях производную аппроксимировать на двух точечном шаблоне.

Варианты:

- 1) $y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$
 $\begin{cases} y(0.7) = 0.5 \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1.2 \end{cases}$
- 2) $y'' - xy' + 2y = x + 1$
 $\begin{cases} y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 2 \\ y(1.2) = 1 \end{cases}$
- 3) $y'' + xy' + y = x + 1$
 $\begin{cases} y(0.5) + 2y'(0.5) = 1 \\ y'(0.8) = 1.2 \end{cases}$
- 4) $y'' + 2y' - \frac{y}{x} = 3$
 $\begin{cases} y(0.2) = 2 \\ 0.5y(0.5) - y'(0.5) = 1 \end{cases}$
- 5) $y'' + 2y' - xy = x^2$
 $\begin{cases} y'(0.6) = 0.7 \\ y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 1 \end{cases}$
- 6) $y'' - y' - \frac{2y}{x} = x + 0.4$
 $\begin{cases} y(1.1) - 0.5y'(1.1) = 2 \\ y'(1.4) = 4 \end{cases}$
- 7) $y'' - 3y' + \frac{y}{x} = 1$
 $\begin{cases} y(0.4) = 2 \\ y(0.7) + 2y'(0.7) = 0.7 \end{cases}$
- 8) $y'' + 3y' - \frac{y}{x} = x + 1$
 $\begin{cases} y'(1.2) = 1 \\ 2y(1.5) - y'(1.5) = 0.5 \end{cases}$
- 9) $y'' - \frac{y'}{2} + 3y = 2x^2$
 $\begin{cases} y(1) + 2y'(1) = 0.6 \\ y(1.3) = 1 \end{cases}$

- 10) $y'' + 1.5y' - xy = 0.5$
 $\begin{cases} 2y(1.3) - y'(1.3) = 1 \\ y(1.6) = 3 \end{cases}$
- 11) $y'' + 2xy' - y = 0.4$
 $\begin{cases} 2y(0.3) + y'(0.3) = 1 \\ y'(0.6) = 2 \end{cases}$
- 12) $y'' - 0.5xy' + y = 2$
 $\begin{cases} y(0.4) = 1.2 \\ y(0.7) + 2y'(0.7) = 1.4 \end{cases}$
- 13) $y'' + \frac{2y'}{x} - 3y = 2$
 $\begin{cases} y'(0.8) = 1.5 \\ 2y(1.1) + y'(1.1) = 3 \end{cases}$
- 14) $y'' + 2x^2y' + y = x$
 $\begin{cases} 2y(0.5) - y'(0.5) = 1 \\ y(0.8) = 3 \end{cases}$
- 15) $y'' - 3xy' + 2y = 1.5$
 $\begin{cases} y'(0.7) = 1.3 \\ 0.5y(1) + y'(1) = 2 \end{cases}$
- 16) $y'' + 2xy' - 2y = 0.6$
 $\begin{cases} y'(2) = 1 \\ 0.4y(2.3) - y'(2.3) = 1 \end{cases}$
- 17) $y'' + \frac{y'}{x} - 0.4y = 2x$
 $\begin{cases} y(0.6) - 0.3y'(0.6) = 0.6 \\ y'(0.9) = 1.7 \end{cases}$
- 18) $y'' + \frac{y'}{2x} + 0.8y = x$
 $\begin{cases} y(1.7) + 1.2y'(1.7) = 2 \\ y'(2) = 1 \end{cases}$
- 19) $y'' - \frac{y'}{3} + xy = 2$
 $\begin{cases} y(0.8) = 1.6 \\ 3y(1.1) - 0.5y'(1.1) = 1 \end{cases}$
- 20) $y'' + 0.8y' - xy = 1.4$
 $\begin{cases} y(1.8) = 0.5 \\ 2y(2.1) + y'(2.1) = 1.7 \end{cases}$
- 21) $y'' + 2y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$
 $\begin{cases} 0.5y(0.9) + y'(0.9) = 1 \\ y(1.2) = 0.8 \end{cases}$
- 22) $y'' - \frac{y'}{4} + \frac{2y}{x} = \frac{x}{2}$
 $\begin{cases} 1.5y(1.3) - y'(1.3) = 0.6 \\ 2y(1.6) = 0.3 \end{cases}$
- 23) $y'' - 0.5y' + 0.5xy = 2x$
 $\begin{cases} y'(1) = 0.5 \\ 2y(1.3) - y'(1.3) = 2 \end{cases}$
- 24) $y'' + 2y' - 1.5xy = \frac{2}{x}$
 $\begin{cases} y'(0.8) = 1 \\ y(1.1) + 2y'(1.1) = 1 \end{cases}$
- 25) $y'' + 2xy' - 1.5 = x$
 $\begin{cases} 1.4y(1.1) + 0.5y'(1.1) = 2, \\ y'(1.4) = 2.5 \end{cases}$
- 26) $y'' - \frac{xy'}{2} + 0.5y = 2x$
 $\begin{cases} 0.4y(0.2) - y'(0.2) = 1.5, \\ y'(0.5) = 0.4 \end{cases}$
- 27) $y'' + 0.6xy' - 2y = 1$
 $\begin{cases} y(1.5) = 0.6, \\ 2y(1.8) - 0.8y'(1.8) = 3 \end{cases}$
- 28) $y'' + \frac{y'}{2x} - y = \frac{2}{x}$
 $\begin{cases} y(0.6) = 1.3, \\ 0.5y(0.9) - 1.2y'(0.9) = 1 \end{cases}$
- 29) $y'' - 0.5x^2y' + 2y = x^2$
 $\begin{cases} y(1.6) + 0.7y'(1.6) = 2, \\ y(1.9) = 0.8 \end{cases}$
- 30) $y'' - xy' + 2xy = 0.8$
 $\begin{cases} y(1.2) + 0.5y'(1.2) = 1, \\ y'(1.5) = 2 \end{cases}$

Тема 8 РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике: найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12\alpha x^2 + 12\beta y^2$$

где $h = 0.25, n = 4, x \in [0;1], y \in [0;1],$

удовлетворяющее на границе краевым условиям

$$u(x, y)|_r = \alpha x^4 + \beta y^4,$$

с точностью до $\varepsilon = 0.01$.

Варианты: $\alpha = n/10$; $\beta = n/5$, n - номер варианта.

Задание 8.1: Используя метод простой итерации, найти приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Задание 8.2: Используя метод Зейделя, найти приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Задание 8.3: Численное решение уравнения теплопроводности.

Используя метод сеток, найти решение смешанной задачи для дифференциального уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), u = u(x, t)$$

с заданными начальными условиями $u(x, 0) = u_0(x)$

и краевыми условиями $u(0, t) = u_1(t), u(1, t) = u_2(t)$, где $x \in [0, 1], t \in [0, 0.02]$

Решение выполнить при $h = 0.1$ по явной схеме $\sigma = \frac{1}{2}$, условие устойчивости $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{4}$.

Варианты:

№	$u(x, 0)$	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$f(x, t)$
1	$x(1-x)+0.5$	$1-10t$	0.3685	$t(1-x)+0.5$
2	$\cos 2x$	1	$2t+0.85$	$t+\cos x$
3	$x(x+1)$	$0.8+t$	1.2	$x(t+1.5)$
4	$2+\lg(x+1)$	$2t$	1.235	$3+\lg(xt+19)$
5	$\sin 2x$	0	$t+2.5$	$\sin 2x+2t$
6	$3x(2-x)$	$1.4+5t$	$10t$	$3x(2-t)$
7	$1+\sin x$	0.2	$t+4t^2$	$t+\sin x$
8	$\sin(x+0.5)$	$0.08+t$	5.75	e^t+3x
9	$0.5+2x(x-1)$	$12t$	$1+5t$	$1-xt$
10	$\sin x+0.1$	$0.8+2t$	4	te^x+2
11	$\cos(2x+0.5)$	$4.5t$	0	$\cos(2t+0.5x)$
12	$2x(x+0.2)+0.4$	$3(1-t)$	$1+2t$	$5x(t+0.4)+1.2$
13	$\lg(x+0.8)+1$	$6(t+0.12)$	0.275	$\log(t+1.2)+x$
14	$\sin(x+0.3)$	0	$10(t+0.1)$	$10(t+x)$
15	$x^2+0.5$	$3t(t+20)$	$t+0.75$	$x^2+0.5t$
16	$(x-0.2)(x+1)+1$	0.25	$0.75t$	$4+(x-0.5)(t+1)$
17	$x(0.4+2x)$	$6.5+t$	1	$x(1+2t)$

18	$\sin(x+0.48)$	$2-5t$	0.8	$\sin(x+5t)$
19	$\cos(x+0.6)$	0.8	$3.75+2t$	$(x+6)t+2$
20	$\lg(x+3.5)$	$8(t+0.1)$	2.8	$2.4\lg(x+5)+e^t$
21	$2+x(1-x)$	$2+t(1-t)$	1.4	$2+t(1-x)$
22	$(0.5-x)+1$	1.2	$t(1+t)$	$(0.5-x)(1+t)$
23	$\cos(x+0.5)$	0,385	$6(t+0,5)$	$\ln(1,5+t)+2x$
24	$x-0,4x^2$	$2,5+t-t^2$	4t	$e^t + \lg x$
25	$(x-3)(x+2)$	4,5t	2,85	$5x+t$
26	$x(x+0,6)$	$2,5(1,5-2t)$	0,95	$(6+2x)t+1,5$
27	$2-x^2$	3.75	$3,75t+1$	$2t+3x$
28	$3,5+x^2$	$0,8t+2$	3,25	$(3+3x)t$
29	10x	1,25	100t	50x
30	$1,75-x^2$	t^2+2t+8	15	100xt

Задание 8.4: Численное решение уравнения колебания струны.

Используя метод сеток составить решение смешанной задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), u = u(x, t)$$

при заданных начальных условиях $u(x, 0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x)$,

и краевых условиях $u(0, t) = u_1(t)$, $u(1, t) = u_2(t)$, $x \in [0, 0.4]$.

Решение выполнить при $h = 0.1$, $\tau = 0.1 * h = 0.01$ по явной схеме $\sigma = 1$.

Первое начальное условие и краевые условия взять из задания 8.3.

Варианты **второго** краевого условия:

№	$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x)$	№	$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x)$
1	$\cos x$	16	$x + \cos x$
2	x^2	17	$x + \sin 2x$
3	$2 \sin x$	18	$1 - x^2$
4	$(x+1)^2$	19	$x^2(x+1)$
5	$x(2-x)$	20	$2x + 0.5$
6	$\sin(x+0.2)$	21	$(x+1) \sin x$
7	$1 + x^2$	22	$(x+0.5) \sin x$
8	$\cos(x+0.5)$	23	$\cos(x+0.3)$
9	$\cos 2x$	24	$x^2 + 0.5$
10	$x^2 + x$	25	$(x+1)^2$

11	$2x+1$	26	$2x^2$
12	$2-x^2$	27	$\cos(x+0,5)$
13	$3,5+x^2$	28	$x-0,4x^2$
14	$10x$	29	$(x-3)(x+2)$
15	$1,75-x^2$	30	$x(x+0,6)$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Березин, И.С. Методы вычислений: в 2 т. Т.1. / И.С.Березин, Н.П.Жидков. – М.: Наука, 1966. – 630с.
- 2 Демидович, Б.П. Численные метода анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Наука, 1967. – 368с.
- 3 Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1970. – 664с.
- 4 Крылов, В.И. Вычислительные методы: в 2 т. Т.1. / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – М.: Наука, 1976. – 304с.
- 5 Крылов, В.И. Вычислительные методы: в 2 т. Т.2. / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – М.: Наука, 1977. – 400с.
- 6 Сборник задач по методам вычислений / под ред. П.И. Монастырного. – Мн.: БГУ, 1983. – 287с.
- 7 Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512с.
- 8 Воробьева, Г.Н. Практикум по вычислительной математике / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. – М.: Высш. школа, 1990. – 208с.
- 9 Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: Высш. школа, 2000. – 230с.
- 10 Бахвалов, Н.С. Численные методы : учеб. Пособие для физ.-мат. специальностей вузов / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков; под общ. ред. Н.И. Тихонова. – 2-е изд. – М.: Физмалит: Лаб. базовых данных; СПб.: Нев.диалект, 2002. – 630с.
- 11 Численные методы: лабораторный практикум. Ч.1 / С.И. Голик [и др.]. М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2001. – 60с.
- 12 Березовская, Е.М. Методы численного анализа : тексты лекций для студентов вузов специальности 1-31 03 06 «Экономическая кибернетика»: в 2 ч. Ч.1. Интерполяция и интегрирование / Е.М. Березовская; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2007. – 131с.
- 13 Березовская, Е.М. Методы вычислений : тексты лекций для студентов вузов специальности 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)»: в 2 ч. Ч.1. Интерполирование и нелинейные уравнения / Е. М. Березовская, М. И. Жадан; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2010. – 80с.